Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера СО РАН

Диаграмма пентагон в размерности $d = 6 - 2e$ с массивной внешней линией.

М.Г. Козлов

Международная Сессия-конференция Секции ядерной физики ОФН РАН
6–8 июня 2017, Нальчик

Определения и обозначения

$$P^{(d)}(s_1,\, s_2,\, s_3,\, s_4,\, s_5, \mu_1) = \int \frac{d^d l}{i\,\pi^{d/2} \prod_{n=0}^{4} (l_n^2 + i0)}\,,$$

$$l_n = l - \sum_{i=1}^{n} p_i\,, \quad p_1^2 = \mu_1\,, \quad p_i^2 = 0\,, \quad \sum_{i=1}^{5} p_i = 0\,, \quad s_n = (p_{n-2} + p_{n+2})^2\,.$$

удобные обозначения

$$r_n = -s_1\mu_1 + \sum_{i=0}^{4} (-1)^i s_{n+i} s_{n+i+1}\,, \quad n = 1,\, 3,\, 4\,,$$

$$r_2 = -2\frac{\mu_1 s_1 s_2}{s_4} + s_1\mu_1 + \sum_{i=0}^{4} (-1)^i s_{2+i} s_{3+i}\,,$$

из r_2 легко получить r_5 заменой $s_2 \leftrightarrow s_5$ и $s_3 \leftrightarrow s_4$

$$\Delta = \det\left(2p_i \cdot p_j\big|_{i,j=1,\ldots 4}\right)\,, \quad S = \frac{4 s_1 s_2 (s_3 s_4 - s_1\mu_1) s_5}{\Delta}\,,$$

$$\Delta_3 = 4 s_2 s_5 - (\mu_1 - s_2 - s_5)^2\,, \quad S_3 = \frac{4 s_2 s_5 \mu_1}{\Delta_3}\,.$$

Дифференциальные уравнения

- Рассматриваем $d = 4 - 2\epsilon$ и $\mu_1 < 0$, $s_i < 0$, $i = 1, \ldots, 5$
- Уравнения получаются с помощью тождеств интегрирования по частям (с помощью LiteRed)

Общий вид дифференциальных уравнений

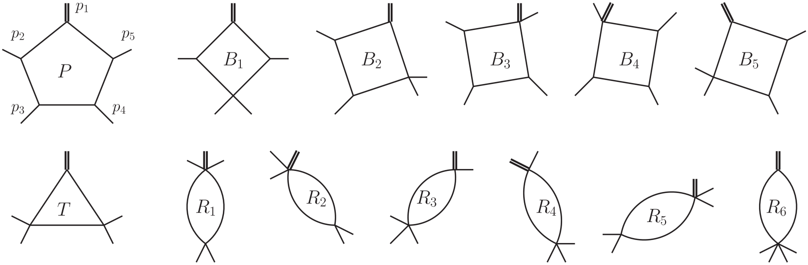
$$\frac{\partial}{\partial s_i} \boldsymbol{J} = M_i(\boldsymbol{s}, \epsilon) \boldsymbol{J}\,, \quad i = 1, \ldots, 5\,, \; \frac{\partial}{\partial \mu_1} \boldsymbol{J} = M_6(\boldsymbol{s}, \epsilon) \boldsymbol{J}$$

$$\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, \mu_1)$$

Набор мастер интегралов
$\boldsymbol{J} = (P,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ B_5,\ T,\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4,\ R_5,\ R_6)^T$

$M_i(\boldsymbol{s}, \epsilon)$ — треугольные матрицы 13×13

Набор мастер интегралов



Дифференциальные уравнения в ϵ-форме

Идея: надо привести дифференциальные уравнения к ϵ-форме.

$$\frac{\partial}{\partial s_i}\widetilde{\boldsymbol{J}} = \epsilon \widetilde{M}_i(\boldsymbol{s})\widetilde{\boldsymbol{J}}$$

Как получить ϵ-форму

1. Приводим диагональные члены к виду $\sim \epsilon$ (пример $P \to f(\boldsymbol{s})P$)
2. Приводим офф-диагональные члены к виду $\sim \epsilon$ (пример $P \to P + \sum_{i=1}^{5} g_i(\boldsymbol{s})B_i$)
3. С помощью преобразования зависящего только от ϵ приводим к ϵ-форме

Дифференциальные уравнения в ϵ-форме

В новом базисе $\widetilde{\boldsymbol{J}} = (\widetilde{P}, \widetilde{B}_1, \ldots \widetilde{R}_6)^T$, уравнения принимают ϵ-форму

$$\frac{\partial \widetilde{\boldsymbol{J}}}{\partial s_i} = \partial_i \widetilde{\boldsymbol{J}} = \epsilon \widetilde{M}_i \widetilde{\boldsymbol{J}}$$

Условие совместимости уравнений (из равенства $\partial_i \partial_j \widetilde{\boldsymbol{J}} = \partial_j \partial_i \widetilde{\boldsymbol{J}}$):

$$\epsilon(\partial_i \widetilde{M}_j - \partial_j \widetilde{M}_i) + \epsilon^2 [\widetilde{M}_i, \widetilde{M}_j] = 0$$

это значит, что $\partial_i \widetilde{M}_j = \partial_j \widetilde{M}_i$ и следовательно

$$\sum_i \widetilde{M}_i ds_i = dA$$

Это значит, что наши уравнения можно написать в $d \log$ форме

$$d\widetilde{\boldsymbol{J}} = \epsilon dA \widetilde{\boldsymbol{J}}$$

Дифференциальные уравнения в ϵ-форме

Связь старого базиса с новым

$$P = \frac{C(\epsilon)}{\epsilon^2 s_1 s_2 (s_3 s_4 - s_1 \mu_1) s_5} \left(\sqrt{\Delta} \widetilde{P} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{5} r_i \widetilde{B}_i \right),$$

$$B_1 = \frac{C(\epsilon)}{\epsilon^2 (s_3 s_4 - s_1 \mu_1)} \widetilde{B}_1 \,, \quad B_i = \frac{C(\epsilon)}{\epsilon^2 s_{i+2} s_{i-2}} \widetilde{B}_i \,, i = 2, \ldots, 5 \,,$$

$$T = \frac{C(\epsilon)}{\epsilon^2 \sqrt{\Delta_3}} \widetilde{T} \,, \quad R_i = \frac{C(\epsilon)}{\epsilon(1 - 2\epsilon)} \widetilde{R}_i \,.$$

где $C(\epsilon) = \Gamma(1-\epsilon) \frac{\Gamma^2(1+\epsilon)}{\Gamma(1+2\epsilon)}$

Дифференциальные уравнения в ϵ-форме

ϵ-форма (и $d\log$-форма) для уравнения на $\widetilde{P}$

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{P} = -\epsilon \Bigg\{ & \widetilde{P} d\Big(\log S\Big) + \sum_{i=1}^{5} \widetilde{B}_i d\Big(\mathrm{arctanh}\ a_i\Big) - \widetilde{T} d\Big(\arctan y\Big) + \\
& + 2 \sum_{i=1,3,4} \widetilde{R}_i d\Big(\mathrm{arctanh}\, a_i - \mathrm{arctanh}\, a_{i+2} - \mathrm{arctanh}\, a_{i-2}\Big) + \\
& + \widetilde{R}_2 d\Big(\mathrm{arctanh}\, a_2 - 2\mathrm{arctanh}\, a_4 - \mathrm{arctanh}\, a_5\Big) + \\
& + \widetilde{R}_5 d\Big(\mathrm{arctanh}\, a_5 - 2\mathrm{arctanh}\, a_3 - \mathrm{arctanh}\, a_2\Big) + \\
& + \widetilde{R}_6 d\Big(2\mathrm{arctanh}\, a_1 + \mathrm{arctanh}\, a_2 + \mathrm{arctanh}\, a_5\Big) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$a_i = \frac{r_i}{\sqrt{\Delta}}$, $y = f(\boldsymbol{s})$ — новые переменные

Дальнейшее упрощение

Вид матрицы dA ($*$ — ненулевые элементы)

$$\begin{bmatrix}
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & * & 0 & * \\
0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & * & 0 & * & * \\
0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & * & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * & 0 & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & 0 & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & *
\end{bmatrix}$$

систему уравнений 13×13 можно свести к трем системам 5×5 и трем системам 6×6

$$\widetilde{\boldsymbol{J}} = \sum_{i=1}^{6} \widetilde{\boldsymbol{J}}^{(i)}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{J}}^{(1)} = (\widetilde{P}^{(1)}, \widetilde{B}_1^{(1)}, 0, \widetilde{B}_3^{(1)}, \widetilde{B}_4^{(1)}, 0, \widetilde{R}_1, 0, 0, 0, 0)^T$$

$$\widetilde{\boldsymbol{J}}^{(2)} = (\widetilde{P}^{(2)}, 0, \widetilde{B}_2^{(2)}, 0, \widetilde{B}_4^{(2)}, \widetilde{B}_5^{(2)}, \widetilde{T}^{(2)}, 0, \widetilde{R}_2, 0, 0, 0, 0)^T$$

Результат интегрирования

Интегрирование осуществляем в следующей области инвариантов:

$$\mathcal{R} = \{\boldsymbol{s}|\, s_i < 0, \mu_1 < 0, \Delta > 0, s_3 s_4 - s_1\mu_1 > 0, \Delta_3 > 0,$$
$$\mu_1 > s_3,\ \mu_1 > s_4,\ s_2 > s_5 + \mu_1,\ s_5 < s_2 + \mu_1,\ \mu_1 > s_2 + s_5\}$$

результат интегрирования:

$$\widetilde{P} = 2\sum_{i=1}^{6}(-s_i)^{-\epsilon}\sqrt{\Delta}\Re\int_1^{\infty}\frac{dt\, t^{\epsilon-1}}{b_i(t)}\left(\arctan\frac{r_{k(i)}}{b_i(t)} - \arctan\frac{g_i(t)}{b_i(t)}\right) + g(\epsilon)(-S)^{-\epsilon}$$

$g(\epsilon)$ — константа интегрирования, $b_i(t) = \sqrt{\Delta\left(\frac{S}{s_i}t - 1\right)}$

$$g_k(t) = r_k + \frac{S\Delta}{s_k(r_{k+2} + r_{k-2})}(1-t)\,,\ k = 1, 3, 4$$

$$g_2(t) = r_4 + \frac{(s_3 s_4 - s_1\mu_1)(s_2 - s_5 - \mu_1)}{\mu_1}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{4 s_5\mu_1}{(s_2 - s_5 - \mu_1)^2}(t-1)}\right]$$

Константа интегрирования

Константу интегрирования находим при $\Delta \to 0$. В данном пределе независимые векторы $p_1, \ldots, p_4$ становятся зависимыми, а значит пентагон будет выражаться через линейную комбинацию Боксов.

Условие на константу

$$\widetilde{P} + g(\epsilon)\,(-S)^{-\epsilon} \xrightarrow{\Delta\to 0} 0$$

константа в области $\mathcal{R}$

$$g(\epsilon) = 2\pi^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(1/2-\epsilon)}{\Gamma(1-\epsilon)}$$

Пентагон при $d = 6 - 2\epsilon$

Рекуррентное соотношение

$$P^{(6-2\epsilon)} = \frac{s_1 s_2 (s_3 s_4 - s_1 \mu_1) s_5}{\epsilon \Delta} \left(P^{(4-2\epsilon)} - \frac{r_1}{2 s_1 s_2 s_5} B_1^{(4-2\epsilon)} - \right.$$
$$\left. - \frac{s_3 s_4}{s_3 s_4 - s_1 \mu_1} \sum_{i=2}^{5} \frac{r_i}{2 s_{i-1} s_i s_{i+1}} B_i^{(4-2\epsilon)} \right)$$

Из рекуррентного соотношения получаем выражение для пентагона при $d = 6 - 2\epsilon$

$$P^{(6-2\epsilon)} = \frac{C(\epsilon)}{\epsilon\sqrt{\Delta}} \left[\widetilde{P} + 2\pi^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(1/2-\epsilon)}{\Gamma(1-\epsilon)} (-S)^{-\epsilon} \right] = \frac{2C(\epsilon)}{\epsilon} \left(\widehat{P} + \mathcal{H}(\boldsymbol{s}, \epsilon) \right)$$

где $\mathcal{H}(\boldsymbol{s}, \epsilon)$ — однородное решение

Аналитическое продолжение

Аналитическое продолжение делаем из области $\mathcal{R}$ в нужную нам область инвариантов $\mathcal{D}$, так чтобы $\mathrm{Im}\, s_i \geqslant 0$.
Аналитическое продолжение имеет вид

$$P^{(6-2\epsilon)} = \frac{2C(\epsilon)}{\epsilon}\left(\widehat{P} + k(\mathcal{D})\mathcal{H}(\boldsymbol{s},\epsilon) + n(\mathcal{D})G(\boldsymbol{s},\epsilon)\right)$$

$k(\mathcal{D})$, $n(\mathcal{D})$ — целые числа, которые зависят от области $\mathcal{D}$.

$$G(\boldsymbol{s},\epsilon) = (-S_3)^{-\epsilon}\Re\int_1^\infty \frac{dt\, t^{\epsilon-1}}{b_0(t)}\left(\arctan\frac{g_-(t)}{b_0(t)} - \arctan\frac{g_+(t)}{b_0(t)}\right)$$

$$b_0(t) = \sqrt{\Delta\left(t\frac{S}{S_3} - 1\right)},\ g_\pm(t) = -s_2 s_3 + s_3 s_4 - s_4 s_5 \pm s_1\sqrt{\Delta_3(t-1)}$$

Результат

$$P^{(6-2\epsilon)}(s) = \frac{2C(\epsilon)}{\epsilon}\left[\sum_{i=1}^{6}(-s_i - i0)^{-\epsilon}\,\Re\int_1^\infty \frac{dt\, t^{\epsilon-1}}{b_i(t)}\left\{\arctan\frac{r_{k(i)}}{b_i(t)} - \arctan\frac{g_i(t)}{b_i(t)}\right\}+\right.$$

$$+\, n(\mathcal{D})(-S_3)^{-\epsilon}\Re\int_1^\infty \frac{dt\, t^{\epsilon-1}}{b_0(t)}\left\{\arctan\frac{g_-(t)}{b_0(t)} - \arctan\frac{g_+(t)}{b_0(t)}\right\}+$$

$$\left. +\, k(\mathcal{D})\,\pi^{\frac{3}{2}}\frac{\Gamma(1/2-\epsilon)}{\Gamma(1-\epsilon)}\frac{(-S)^{-\epsilon}}{\sqrt{\Delta}}\right],$$

для краткости $s_6 \equiv \mu_1$, целые числа $k(\mathcal{D})$, $n(\mathcal{D})$ известны.

Разложение по размерности начинается с ϵ^0.

Phys.Rev. D 95 (2017) p. 036008, arXiv:1612.03565

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 16-02-00888 и 16-32-60033